

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ASTRA”

Etapă locală, 07.02.2026

Filiera tehnologică

Clasa a X-a

1. Se consideră expresia $E(x) = \log_x(x-1) + \log_{x-1}x + 2$, pentru orice număr real $x \in (1, \infty) \setminus \{2\}$.

a) (15p) Calculați $E\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

b) (10p) Demonstrați că $E(x) \geq 4$, pentru orice număr real $x \in (2, \infty)$.

2. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = 1$ și $z_1^2 + z_2^2 = 0$.

a) (10p) Determinați $\frac{z_1}{z_2}$.

b) (10p) Arătați că $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$.

3. Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-3 + \frac{1}{x}}$.

a) (10p) Determinați domeniul maxim de definiție al funcției f .

b) (10p) Rezolvați ecuația $x^4 + 6x^2 + 6 = f(2 + \sqrt{3})$ în mulțimea numerelor complexe.

4. Pentru a calcula numărul de tranzistori integrați pe un microprocesor după t ani, Gordon Moore a conceput formula $N(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{T}}$, unde N_0 este numărul inițial de tranzistori, iar T este perioada de dublare. La momentul inițial un microprocesor conține $5 \cdot 10^6$ tranzistori, iar perioada de dublare este de 2 ani.

a) (10p) Determinați numărul de tranzistori ai microprocesorului după 10 ani.

b) (15p) După câți ani numărul de tranzistori va depăși 1 miliard? Utilizați, eventual, faptul că $\log_2 10 \approx 3,33$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.